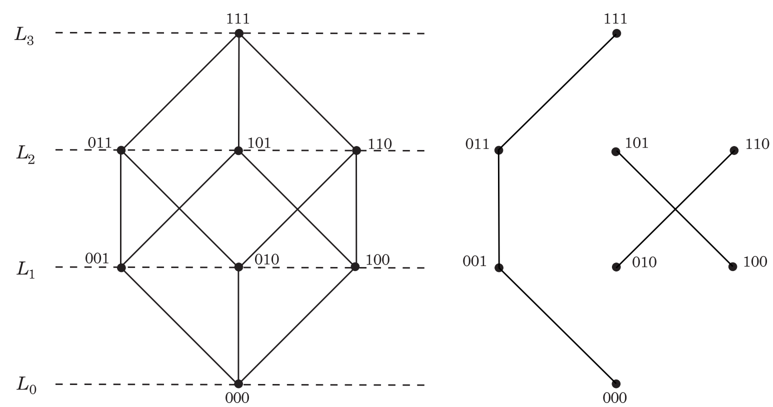
Úloha 3, reťazce a antiraťazce

1. je úloha z Proofs from THE BOOK. Nech $n = 2m + 1$ a $\mathcal{F}$ je najväčší antireťazec v $\mathcal{P}(X)$ ($|X| = n$). Ukážte, že buď $\mathcal{F}$ pozostáva z množín veľkosti m, alebo pozostáva z $m + 1$ prvkových množín. Pomôcka: Pozorne prejdite dôkaz Spernerovej vety, všimnite si miesto kde sa uvažuje o počte dvojíc $(., C)$, kde C je retazec.

2. Problem 6.A z van Lint.

3. Kocka Q_n dimenzie n kóduje potenčnú množinu $P(N)$ n-prvkovej množiny N, a naviac, je Hasseho diagramom čiastočného usporiadania množiny $P(N)$ inklúziou. Povieme, že reťazec $C_1 \subset C_2 \subset \cdots \subset C_r$ prvkov $P(N)$ je *symetrický*, ak pri čítaní zľava doprava veľkosti množín rastú presne o 1 a $|C_1| + |C_r| = n$.

   Na Obr. 1a) máme kocku Q_3 a na Obr. 1b) máme rozklad Q_3 na symetrické reťazce.



Obr. 1a) Obr. 1b)

   Ukážte, že pre každé kladné číslo n existuje rozklad kocky Q_n dimenzie n na symetrické reťazce a teda platí Spernerova veta = Problem 6.D z van Lint.

4. Na prednáške sme ukázali, že Hallova veta je špeciálnym prípadom Dilworthovej vety. Odvoďte Dilworthovu vetu pomocou grafovej verzie Konigovej vety. (Takto Dilworthova veta je ekvivalentná s Hallovou vetou, a teda aj s ňou ekvivalentnými verziami.) Pomôcka: Pre čum

$(P, \leq)$, $|P| = n$, definujeme bipartitný graf $G = (U \cup W, E)$, $U = \{u_s : s \in P\}$ a $W = \{v_s : s \in P\}$ pričom $(u_s, v_t) \in E$ práve vtedy keď $s < t$. Ukážte, že každému párovaniu J v G odpovedá taký rozklad D množiny P na reťazce, že $n = |J| + |D|$. Ďalej uvážte najmenšie vrcholové pokrytie $C = \{u_{s_1}, \dots u_{s_k}, v_{t_1}, \dots v_{t_r}\}$ hrán grafu G a ukážte, že $n = |C| + |A|$, kde A je antireťazec v P.